УДК 004.42:510.69

С.С. Шкільняк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
Україна, 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 60

Логічний наслідок та його формалізації в композиційно-номінативних логіках

S.S. Shkilniak
Taras Shevchenko National University of Kyiv
Ukraine, 01601, Kyiv, Volodymyrska st., 60

Logical Consequence and its Formalizations in Composition Nominative Logics

С.С. Шкильняк
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Украина
Украина, 01601, г. Киев, ул. Владимирская, 60

Логическое следствие и его формализации в композиционно-номинативных логиках

Для композиційно-номінативних логік часткових однозначних, тотальних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів запропоновано різні семантики та різні формалізації відношення логічного наслідку. Досліджено властивості таких формалізацій, визначено співвідношення між різними відношеннями логічного наслідку в різних семантиках.
Ключові слова: логіка, семантика, предикат, логічний наслідок.

Various semantics and various formalizations of relation of logical consequence for composition nominative logics of partial single-valued, total, and partial multiple-valued quasiary predicates are introduced. The authors study properties of the defined formalizations and specify correlations of different relations of logical consequence in different semantics.
Key words: logic, semantic, predicate, logical consequence.

Для композиционно-номинативных логик частичных однозначных, тотальных и частичных неоднозначных квазиарных предикатов предложены разные семантики и разные формализации отношения логического следствия. Исследованы свойства таких формализаций, определены соотношения между разными отношениями логического следствия в разных семантиках.
Ключевые слова: логика, семантика, предикат, логическое следствие.

Вступ

Апарат математичної логіки лежить в основі сучасних інтелектуальних інформаційних систем. Поняття і методи математичної логіки дають обґрунтування правильності тих чи інших способів отримання істинного знання. Розроблено багато різноманітних логічних систем [1], які успішно використовуються в інформатиці та програмуванні. Такі системи зазвичай базуються на класичній логіці предикатів. Особливе її місце серед логічних формалізмів зумовлене тим, що класична логіка детально досліджена, вона є основою низки спеціальних логік (модальних, темпоральних, епістемічних, динамічних тощо), для неї побудовано багато систем автоматизованого дове-

дення. Проте класична логіка, незважаючи на всі її позитивні вартості, не дозволяє адекватно виразити потреби програмування. Вона має низку обмежень, які ускладнюють її застосування. Найперше, це те, що в класичній логіці предикати трактуються як тотальні скінченно-арні відображення, а в моделюванні та програмуванні використовуються набагато потужніші класи часткових функцій і предикатів над іменними (номінативними) даними. Класична логіка недостатньо враховує структурованість, частковість інформації про предметну область.

Обмеження класичної логіки висувають на перший план проблему побудови адекватних логічних формалізмів, які більше орієнтовані на потреби моделювання та програмування. Плодотворним тут виявився композиційно-номінативний підхід до побудови моделей програм та орієнтованих на них логік [2]. На його основі розроблено [3], [4] широкий спектр композиційно-номінативних логік (КНЛ), що знаходяться на різних рівнях абстрактності та загальності. Композиційно-номінативний підхід базується на принципах композиційності [5] і номінативності [2], він опирається на загальнометодологічний принцип розвитку як сходження від абстрактного до конкретного. Принцип композиційності трактує засоби побудови функцій та предикатів як алгебраїчні операції. Для логіки це означає зведення логічних зв’язок і кванторів до композицій предикатів. Принцип номінативності означає необхідність використання відношень іменування для побудови семантичних моделей та опису предикатів. КНЛ базуються на загальних класах часткових відображень, заданих на довільних наборах іменованих значень. Такі відображення названо квазіарними.

Центральним поняттям логіки є поняття логічного слідування, воно може бути формалізованим за допомогою відношень логічного наслідку. Для пропозиційної логіки різноманітні відношення логічного наслідку та нестандартні семантики вивчались О.Д. Смирновою [6]. Подібні семантики та відношення узагальнені [7] для КНЛ квазіарних предикатів. Логіки часткових однозначних предикатів – це логіки з неокласичною семантикою, тотальних неоднозначних предикатів – із пересиченою семантикою, часткових неоднозначних предикатів – із загальною семантикою.

Метою даної роботи є дослідження відношень логічного наслідку для КНЛ часткових однозначних, тотальних неоднозначних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів реномінативного і кванторного рівнів. В різних семантиках такі відношення мають різні властивості, зокрема, в класичній логіці усі вони збігаються.

Для полегшення читання наведемо основні поняття та визначення. Поняття, які тут не визначаються, будемо тлумачити в сенсі [4].

Основні поняття та визначення

Основним поняттям логіки з семантичного погляду є поняття предиката.

Під предикатом на множині D будемо розуміти довільну функцію вигляду

$$P : D \to \{T, F\},$$

де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

У класичній логіці предикати однозначні й тотальні. В загальному випадку вони можуть бути однозначними чи неоднозначними, тотальними чи частковими.

Областю істинності та областю хибності предиката P на D назвемо множини

$$\boldsymbol{T}(P) = P^{-1}(T) = \{d\in D \mid T\in P(d)\},$$
$$\boldsymbol{F}(P) = P^{-1}(F) = \{d\in D \mid F\in P(d)\}.$$

Якщо P однозначний, то $\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$; якщо P тотальний, то $\boldsymbol{T}(P)\cup\boldsymbol{F}(P) = D$.

Предикат P на D тотально істинний, якщо $\boldsymbol{T}(P) = D$.

Предикат P на D тотально хибний, якщо $\boldsymbol{F}(P) = D$.

Предикат P на D тотожно істинний, якщо $\boldsymbol{T}(P) = D$ та $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

Предикат P на D тотожно хибний, якщо $\boldsymbol{T}(P) = \varnothing$ та $\boldsymbol{F}(P) = D$.

Предикат P на D неспростовний, або частково істинний, якщо $\boldsymbol{F}(P) = \varnothing$.

Предикат P на D виконуваний, якщо $\boldsymbol{T}(P) \neq \varnothing$.

Згідно з композиційно-номінативним підходом, побудова складних даних із простіших відбувається на основі відношень іменування (номінативних відношень), такі складні дані названі номінатами. Найважливішим класом номінатів є іменні множини (ІМ) – однорівневі однозначні номінати, тобто множини пар «ім'я – значення». Поняття ІМ під різними назвами широко розповсюджене в математиці й програмуванні. Зокрема, до ІМ можна віднести кортежі, послідовності, індексовані множини тощо.

V-іменна множина (V-ІМ) над A – це довільна однозначна функція $\delta : V \to A$.

A і V трактуємо як множину предметних значень і множину предметних імен.

ІМ подаємо у вигляді $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n,...]$. Тут $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Множину всіх V-ІМ над A позначаємо ${}^V\!A$.

Вводимо функцію $im : {}^V\!A \to 2^V$ так: $im(\delta) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in \delta$ для деякого $a \in A\}$.

Визначаємо $\delta \| X = \{v \mapsto a \in \delta \mid v \in X\}$, де $X \subseteq V$. Замість $\delta \| (V \setminus \{x\})$ пишемо $\delta \|\text{-}x$.

Операцію накладки ∇ визначаємо так: $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \| (V \setminus im(\delta_2)))$.

Параметричну операцію реномінації $\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n} : {}^V\!A \to {}^V\!A$ задаємо так:

$$\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(\delta) = [v_1 \mapsto \delta(x_1),...,v_n \mapsto \delta(x_n)] \cup (\delta \| (V \setminus \{v_1,...,v_n\})).$$

Замість запису вигляду $y_1,\ldots,y_n$ будемо також скорочено писати $\bar{y}$.

Предикат вигляду $P : {}^V\!A \to \{T, F\}$ назвемо V-квазіарним предикатом на A.

Множину V-квазіарних предикатів на A позначимо Pr^A.

Фундаментальною властивістю функцій та предикатів, які використовуються в програмуванні, є монотонність щодо розширення даних новими компонентами.

Функція $f : D \to R$ монотонна, якщо з умови $d \subseteq d'$ випливає $f(d) \subseteq f(d')$.

Окремим випадком монотонності є еквітонність – збереження функцією прийнятого значення при розширенні даних. Зокрема, предикат $P : D \to \{T, F\}$ називають еквітонним, якщо з умови $P(d) \neq \varnothing$ та $d \subseteq d'$ випливає $P(d') = P(d)$.

Для однозначних часткових предикатів монотонність (еквітонність) означає, що «інформативність» предиката не може зменшуватися при збільшенні «інформативності» вхідних даних. Для тотальних неоднозначних предикатів все навпаки: при розширенні даних «інформативність» предиката може тільки зменшуватися, тому в класі тотальних неоднозначних предикатів поняття монотонності не зовсім адекватне. Прийнятною для тотальних предикатів є дуальна до монотонності властивість антитонності (для предикатів антитонність також названа [7] антитеквітонністю).

Предикат $P : D \to \{T, F\}$ антитонний, якщо з умови $d \subseteq d'$ випливає $P(d) \supseteq P(d')$.

Якщо P антитонний, то $P(\varnothing)$ складається з усіх значень, які предикат може приймати на D. В класі однозначних предикатів антитонними можуть бути лише майже константні предикати, тобто такі, що $P(d) \subseteq \{T\}$ для всіх $d \in D$ або $P(d) \subseteq \{F\}$ для всіх $d \in D$. Тому в класі однозначних предикатів поняття антитонності малозмістовне. Водночас для тотальних неоднозначних предикатів поняття антитонності цілком адекватне,

адже для них антитонність означає, що «інформативність» предиката не може зменшуватися при збільшенні «інформативності» вхідних даних.

Композиції квазіарних предикатів

Згідно з композиційно-номінативним підходом, логіки будуємо за семантико-синтаксичною схемою. Це означає, що спочатку задаємо інтенсіональні (змістовні) моделі логік. Такі моделі найперше визначаються рівнями розгляду даних, тому для їх задання фіксуємо рівень абстракції розгляду. Інтенсіональні моделі індукують мову логіки відповідного рівня. Далі будуємо відповідні розглянутому рівню екстенсіональні моделі, які задають семантичні аспекти логік, – предикатні композиційні системи. Вони мають вигляд $(D, Pr, \boldsymbol{C})$, де Pr – множина предикатів на D, $\boldsymbol{C}$ – множина композицій Pr. Кожна така система задає дві алгебри: алгебру (алгебраїчну систему) даних (D, Pr) та композиційну алгебру предикатів $(Pr, \boldsymbol{C})$, терми якої трактуються як формули мови логіки. Саме композиції визначають універсальні методи побудови предикатів, виступаючи ядром логіки певного типу. Нарешті, будуємо формально-аксіоматичні логічні числення, які задають синтаксичні аспекти логік. Основні їх типи – гільбертівські формальні системи та ґенценівські секвенційні системи.

Побудову композиційно-номінативних логік починаємо з гранично-абстрактних рівнів, поступово їх конкретизуючи.

На *пропозиційному* рівні дані трактуються гранично абстрактно, як «чорні скриньки», предикати мають вигляд $P : D \to \{T, F\}$, де D – сукупність абстрактних даних.

Композиції пропозиційного рівня називають логічними зв'язками, найпопулярнішими є заперечення $\neg$, диз'юнкція $\vee$, кон'юнкція **&**, імплікація $\to$, еквіваленція $\leftrightarrow$.

Предикати $\neg(P)$, $\vee(P, Q)$ $\to(P, Q)$, $\&(P, Q)$ $\leftrightarrow(P, Q)$ традиційно позначаємо $\neg P$, $P\vee Q$, $P\to Q$, $P\&Q$, $P\leftrightarrow Q$. Задамо ці предикати через їх області істинності та хибності.

$\boldsymbol{T}(\neg P) = \boldsymbol{F}(P)$; $\boldsymbol{F}(\neg P) = \boldsymbol{T}(P)$.

$\boldsymbol{T}(P\vee Q) = \boldsymbol{T}(P)\cup\boldsymbol{T}(Q)$; $\boldsymbol{F}(P\vee Q) = \boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q)$.

$\boldsymbol{T}(P\&Q) = \boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q)$; $\boldsymbol{F}(P\&Q) = \boldsymbol{F}(P)\cup\boldsymbol{F}(Q)$.

$\boldsymbol{T}(P\to Q) = \boldsymbol{F}(P)\cup\boldsymbol{T}(Q)$; $\boldsymbol{F}(P\to Q) = \boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q)$.

$\boldsymbol{T}(P\leftrightarrow Q) = (\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q))\cup(\boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q))$; $\boldsymbol{F}(P\leftrightarrow Q) = (\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q))\cup(\boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q))$.

Теорема 1. Для загального випадку часткових неоднозначних предикатів справджуються наступні властивості логічних зв'язок: комутативність і асоціативність $\vee$, **&** та $\leftrightarrow$; дистрибутивність $\vee$ відносно **&** та **&** відносно $\vee$; ідемпотентність $\vee$ та **&**; закони контрапозиції, зняття подвійного заперечення, де Моргана.

Зауважимо, що властивість $P\leftrightarrow Q = (P\to Q)\&(Q\to P)$ справджується тільки для однозначних предикатів. Справді, маємо

$$\boldsymbol{T}((P\to Q)\&(Q\to P)) = (\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{T}(Q))\cup(\boldsymbol{F}(P)\cap\boldsymbol{F}(Q))\cup(\boldsymbol{T}(P)\cap\boldsymbol{F}(P))\cup(\boldsymbol{T}(Q)\cap\boldsymbol{F}(Q)).$$

Композиції $\neg$ та $\vee$ називають базовими пропозиційними композиціями.

На *номінативному* рівні дані розглядаються як «сірі» скриньки, побудовані з «білих» і «чорних». Цей рівень є дуже багатим і розпадається на низку підрівнів. Найважливішим є підрівень однозначних номінатів – іменних множин. На цьому підрівні далі виділяємо реномінативний та першопорядкові рівні.

На *реномінативному* рівні можна перейменовувати компоненти даних, що дає змогу ввести нову композицію реномінації $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$. Базові композиції: $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$.

Дамо визначення предиката $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ через його області істинності та хибності:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{T}(P));\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{F}(P)).$$

Першопорядкові рівні характеризуються наявністю дуже потужних композицій квантифікації $\exists\boldsymbol{x}$ та $\forall\boldsymbol{x}$. Дамо визначення предикатів $\exists\boldsymbol{x}P$ і $\forall\boldsymbol{x}P$:

$\boldsymbol{T}(\exists\boldsymbol{x}P) = \{d\in{}^{V}A \mid T\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для деякого $a\in A\}$.

$\boldsymbol{F}(\exists\boldsymbol{x}P) = \{d\in{}^{V}A \mid F\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для всіх $a\in A\}$.

$\boldsymbol{T}(\forall\boldsymbol{x}P) = \{d\in{}^{V}A \mid T\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для всіх $a\in A\}$.

$\boldsymbol{F}(\forall\boldsymbol{x}P) = \{d\in{}^{V}A \mid F\in P(d\nabla x\mapsto a)$ для деякого $a\in A\}$.

Із першопорядкових обмежимося тут розглядом логік *кванторного* рівня, або чистих КНЛ (ЧКНЛ). Базовими композиціями кванторного рівня є $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $\exists\boldsymbol{x}$.

Властивості, наведені нижче в теоремах 2 і 3, справджуються для загального випадку часткових неоднозначних квазіарних предикатів.

Теорема 2. 1) $\exists\boldsymbol{x}\exists\boldsymbol{y}P = \exists\boldsymbol{y}\exists\boldsymbol{x}P$ та $\forall\boldsymbol{x}\forall\boldsymbol{y}P = \forall\boldsymbol{y}\forall\boldsymbol{x}P$;

2) $\neg\exists\boldsymbol{x}P = \forall\boldsymbol{x}\neg P$ та $\neg\forall\boldsymbol{x}P = \exists\boldsymbol{x}\neg P$ – закони де Моргана для кванторів;

3) $\exists\boldsymbol{x}\exists\boldsymbol{x}P = \exists\boldsymbol{x}P$; $\exists\boldsymbol{x}\forall\boldsymbol{x}P = \forall\boldsymbol{x}P$; $\forall\boldsymbol{x}\exists\boldsymbol{x}P = \exists\boldsymbol{x}P$; $\forall\boldsymbol{x}\forall\boldsymbol{x}P = \forall\boldsymbol{x}P$;

4) $\exists\boldsymbol{x}P\vee\exists\boldsymbol{x}Q = \exists\boldsymbol{x}(P\vee Q)$ та $\forall\boldsymbol{x}P\,\&\,\forall\boldsymbol{x}Q = \forall\boldsymbol{x}(P\& Q)$.

Теорема 3. Справджуються такі властивості, пов'язані з реномінаціями:

RT) $\boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$;

R¬) $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P) = \neg\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$;

R∨) $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P\vee Q) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)\vee\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$;

RR) $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\circ_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)$ – згортка реномінацій [4];

RSN) нехай $y\in V$ строго неістотне [4] для предиката P. Тоді $\boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$;

NR) $\exists\boldsymbol{y}\boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P) = \boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P)$ та $\forall\boldsymbol{y}\boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P) = \boldsymbol{R}_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P)$ при $y\notin\{z,\bar{x}\}$;

RQ) $\exists\boldsymbol{y}\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP)$ та $\forall\boldsymbol{y}\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\forall yP)$ при $y\notin\{\bar{v},\bar{x}\}$.

Теорема 4. Композиції $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ та $\exists\boldsymbol{x}$ зберігають еквітонність і антитонність *V*-квазіарних предикатів.

Розглянемо наступні співвідношення, на перший погляд цілком очевидні.

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}_{y}^{x}(P))\subseteq\boldsymbol{T}(\exists\boldsymbol{x}(P)) \qquad (\mathrm{TR}\exists)$$

$$\boldsymbol{F}(\exists\boldsymbol{x}(P))\subseteq\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_{y}^{x}(P)) \qquad (\mathrm{FR}\exists)$$

$$\boldsymbol{T}(\forall\boldsymbol{x}(P))\subseteq\boldsymbol{T}(\boldsymbol{R}_{y}^{x}(P)) \qquad (\mathrm{TR}\forall)$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R}_{y}^{x}(P))\subseteq\boldsymbol{F}(\forall\boldsymbol{x}(P)) \qquad (\mathrm{FR}\forall)$$

Теорема 5. 1) Для загального випадку квазіарних предикатів невірні усі чотири співвідношення TR∃, FR∃, TR∀, FR∀.

2) Для монотонних (еквітонних) предикатів вірні TR∃ і FR∀, невірні FR∃ і TR∀.

3) Для антитонних предикатів вірні FR∃ і TR∀, невірні TR∃ і FR∀.

Для спростування зазначених співвідношень у відповідних класах достатньо розглянути приклади таких предикатів.

Приклад 1. $P_1(d)=\begin{cases}\{F\}, \text{ якщо } x\in im(d),\\ \{T\}, \text{ якщо } x\notin im(d).\end{cases}$ $P_2(d)=\begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x\in im(d),\\ \{F\}, \text{ якщо } x\notin im(d).\end{cases}$

$P_3(d)=\begin{cases}\{F\}, \text{ якщо } x\in im(d),\\ \varnothing, \text{ якщо } x\notin im(d).\end{cases}$ $P_4(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\in im(d),\\ \{T\}, \text{ якщо } x\notin im(d).\end{cases}$

$P_5(d)=\begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x\in im(d),\\ \varnothing, \text{ якщо } x\notin im(d).\end{cases}$ $P_6(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\in im(d),\\ \{F\}, \text{ якщо } x\notin im(d).\end{cases}$

$P_7(d)=\begin{cases}\{F\}, \text{ якщо } x\notin im(d),\\ \varnothing, \text{ якщо } x\in im(d).\end{cases}$ $P_8(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\notin im(d),\\ \{T\}, \text{ якщо } x\in im(d).\end{cases}$

$P_9(d)=\begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x\notin im(d),\\ \varnothing, \text{ якщо } x\in im(d).\end{cases}$ $P_{10}(d)=\begin{cases}\{T,F\}, \text{ якщо } x\notin im(d),\\ \{F\}, \text{ якщо } x\in im(d).\end{cases}$

Предикати P_1 та P_2 тотальні однозначні нееквітонні й неантитонні, P_3 та P_5 еквітонні однозначні, P_4 та P_6 монотонні тотальні неоднозначні, P_7 та P_9 антитонні однозначні, P_8 та P_{10} антитонні тотальні неоднозначні.

Наслідок 2. 1) Для загального випадку квазіарних предикатів невірні усі чотири співвідношення $\boldsymbol{T}(P)\subseteq\boldsymbol{T}(\exists\boldsymbol{x}(P))$, $\boldsymbol{F}(\exists\boldsymbol{x}(P))\subseteq\boldsymbol{F}(P)$, $\boldsymbol{T}(\forall\boldsymbol{x}(P))\subseteq\boldsymbol{T}(P)$, $\boldsymbol{F}(P)\subseteq\boldsymbol{F}(\forall\boldsymbol{x}(P))$;

2) для еквітонних предикатів вірні $\boldsymbol{T}(P)\subseteq\boldsymbol{T}(\exists\boldsymbol{x}(P))$ та $\boldsymbol{F}(P)\subseteq\boldsymbol{F}(\forall\boldsymbol{x}(P))$, невірні $\boldsymbol{F}(\exists\boldsymbol{x}(P))\subseteq\boldsymbol{F}(P)$ та $\boldsymbol{T}(\forall\boldsymbol{x}(P))\subseteq\boldsymbol{T}(P)$;

3) для антитонних предикатів вірні $\boldsymbol{F}(\exists x(P))\subseteq\boldsymbol{F}(P)$ та $\boldsymbol{T}(\forall x(P))\subseteq\boldsymbol{T}(P)$, невірні $\boldsymbol{T}(P)\subseteq\boldsymbol{T}(\exists x(P))$ та $\boldsymbol{F}(P)\subseteq\boldsymbol{F}(\forall x(P))$.

Логічні наслідки в логіках квазіарних предикатів

Семантичними моделями КНЛ кванторного рівня, або ЧКНЛ, є композиційні системи квазіарних предикатів $({}^{V}A, Pr^{A}, \boldsymbol{C})$, де $\boldsymbol{C}$ задається базовими композиціями $\neg$, $\vee$, $\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists\boldsymbol{x}$. Алфавіт мови ЧКНЛ складається із символів базових композицій, множини Ps предикатних символів (сигнатура мови), множини V предметних імен.

Множина Fr формул мови ЧКНЛ визначається індуктивно.

1) Кожний предикатний символ (ПС) є формулою; такі формули атомарні.

2) Нехай Φ та Ψ – формули. Тоді $\neg\Phi$, $\vee\Phi\Psi$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$, $\exists x\Phi$ – формули.

Моделями мови ЧКНЛ вважаємо [4] алгебраїчні системи (АС) з доданою сигнатурою $((A, Pr^{A}), \boldsymbol{I})$. Вони пов'язують мову ЧКНЛ із АС даних. Тотальне однозначне відображення $\boldsymbol{I}: Ps\to Pr$ визначає відображення інтерпретації формул $\boldsymbol{J}: Fr\to Pr^{A}$:

1) $\boldsymbol{J}(p)=\boldsymbol{I}(p)$ для кожного $p\in Ps$.

2) $\boldsymbol{J}(\neg\Phi)=\neg(\boldsymbol{J}(\Phi))$, $\boldsymbol{J}(\vee\Phi\Psi)=\vee(\boldsymbol{J}(\Phi),\boldsymbol{J}(\Psi))$, $\boldsymbol{J}(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi)=\boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\boldsymbol{J}(\Phi))$, $\boldsymbol{J}(\exists x\Phi)=\exists\boldsymbol{x}(\boldsymbol{J}(\Phi))$.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ позначаємо Φ_A.

Φ (частково) істинна при інтерпретації на $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$, або $\boldsymbol{A}$-неспростовна, якщо Φ_A – істинний предикат. Цей факт позначимо $\boldsymbol{A}\models\Phi$.

Φ усюди істинна, або неспростовна (позначаємо $\models\Phi$), якщо Φ – $\boldsymbol{A}$-неспростовна при інтерпретації на кожній моделі мови $\boldsymbol{A}$.

Φ виконувана при інтерпретації на $\boldsymbol{A}=(A,\boldsymbol{I})$, якщо Φ_A – виконуваний предикат.

Формула Φ виконувана, якщо Φ виконувана при інтерпретації на деякій $\boldsymbol{A}$.

Φ тотально істинна при інтерпретації на $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ (позначаємо $\boldsymbol{A} \models\equiv \Phi$), якщо Φ_A – тотально істинний предикат.

Φ тотально істинна (позначаємо $\models\equiv \Phi$), якщо Φ тотально істинна при кожній інтерпретації.

Аналогічно визначаємо тотально хибні на $\boldsymbol{A}$ та тотально хибні формули.

Поняття тавтології (формули, істинної тільки згідно із законами пропозиційної логіки) вводимо [4] таким чином.

Істиннісна оцінка мови – це довільне тотальне однозначне $\tau : Ps \to \{T, F\}$.

Таке $\tau : Ps \to \{T, F\}$ продовжимо до $\tau : Fp \to \{T, F\}$. Для цього покладемо

$$\tau(\neg\Phi) = T \Leftrightarrow \tau(\Phi) = F;\ \tau(\vee\Phi\Psi) = T \Leftrightarrow \tau(\Phi) = T \text{ або } \tau(\Psi) = T.$$

Формула Φ тавтологія, якщо $\tau(\Phi) = T$ при кожній істиннісній оцінці τ.

Введемо тепер важливе поняття дуальних моделей мови.

АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$, якщо $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$ для кожного $\Phi \in Ps$. Зрозуміло, що тоді $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ дуальна до $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$.

Якщо $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$ – АС з частковими однозначними предикатами, то дуальна $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ – АС з тотальними неоднозначними предикатами, та навпаки.

Теорема 6. Нехай АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$. Тоді для кожної формули Φ маємо:

1) $T(\Phi_B) = \overline{F(\Phi_A)}$ та $F(\Phi_B) = \overline{T(\Phi_A)}$.

2) Φ_A еквітонний $\Rightarrow \Phi_B$ антитонний та Φ_A антитонний $\Rightarrow \Phi_B$ еквітонний.

Доведення проводиться індукцією згідно з побудовою формули.

Наслідок 3. Неокласична семантика та пересичена семантика дуальні.

Це означає, що Φ_A неспростовний на АС $\boldsymbol{A}$ із частковими однозначними предикатами (неокласична семантика) $\Leftrightarrow \Phi_B$ тотально істинний на дуальній АС $\boldsymbol{B}$ із тотальними неоднозначними предикатами (пересичена семантика).

У випадку неокласичної семантики кожний ПС можна проінтерпретувати як всюди невизначений предикат, у випадку пересиченої семантики – як предикат із областями істинності та хибності, рівними всій ${}^{V}A$. Звідси маємо:

Твердження 1. 1. У випадку неокласичної семантики множина тотально істинних формул порожня.

2. У випадку пересиченої семантики множина неспростовних формул порожня.

3. У випадку загальної семантики множини тотально істинних та неспростовних формул порожні.

Для пропозиційної логіки, зокрема, отримуємо:

1. Традиційна інтерпретація пропозиційних формул (ПФ) за допомогою істиннісних оцінок еквівалентна інтерпретації ПФ на АС з тотальними однозначними предикатами. Тоді маємо: Φ неспростовна ⇔ Φ тотально істинна ⇔ Φ тавтологія.

2. При інтерпретації ПФ на АС з частковими однозначними предикатами (неокласична семантика) маємо: Φ неспростовна ⇔ Φ тавтологія.

3. При інтерпретації ПФ на АС з тотальними неоднозначними предикатами (пересичена семантика) маємо: Φ тотально істинна ⇔ Φ тавтологія.

На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів на множині формул можна ввести багато *відношень логічного наслідку*. Задамо 5 таких «природних» відношень. В різних семантиках вони мають різні властивості.

Спочатку задаємо відношення наслідку для двох формул при інтерпретації на фіксованій АС $\boldsymbol{A}$.

1) «Істиннісний» наслідок $_{\boldsymbol{A}}|\!=_T$: $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_T \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$.

2) «Хибнісний» наслідок $_{\boldsymbol{A}}|\!=_F$: $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_F \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

3) «Сильний» наслідок $_{\boldsymbol{A}}|\!=_{TF}$: $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \subseteq \boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Psi_A) \subseteq \boldsymbol{F}(\Phi_A)$.

4) «Неспростовнісний» наслідок $_{\boldsymbol{A}}|\!=_{Cl}$: $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{Cl} \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) \cap \boldsymbol{F}(\Psi_A) = \varnothing$.

5) «Насичений» наслідок $_{\boldsymbol{A}}|\!=_{Cm}$: $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{Cm} \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{F}(\Phi_A) \cup \boldsymbol{T}(\Psi_A) = D$.

Зауважимо, що для логік номінативних рівнів D – це $^V\!A$.

Тепер визначаємо відповідні логічні наслідки для двох формул.

1) «Істиннісний» $|\!=_T$: $\Phi\ |\!=_T \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_T \Psi$ для кожної АС $\boldsymbol{A}$.

2) «Хибнісний» $|\!=_F$: $\Phi\ |\!=_F \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_F \Psi$ для кожної АС $\boldsymbol{A}$.

3) «Сильний» $|\!=_{TF}$: $\Phi\ |\!=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{TF} \Psi$ для кожної АС $\boldsymbol{A}$.

4) «Неспростовнісний» $|\!=_{Cl}$: $\Phi\ |\!=_{Cl} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{Cl} \Psi$ для кожної АС $\boldsymbol{A}$.

5) «Насичений» $|\!=_{Cm}$: $\Phi\ |\!=_{Cm} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_{Cm} \Psi$ для кожної АС $\boldsymbol{A}$.

Традиційним логічним наслідком пропозиційного рівня є тавтологічний:

Ψ є тавтологічним наслідком Φ (позначимо $\Phi\ |\!=_t \Psi$), якщо $\Phi\to\Psi$ – тавтологія.

Нехай $\Phi\ |\!= \Psi$, де $|\!=$ – одне з відношень $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$, $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$. Тоді $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|\!= \Psi$ мусить, зокрема, виконуватися для кожної класичної АС $\boldsymbol{A}$ з тотальними однозначними предикатами, тому для випадку пропозиційної логіки формула $\Phi\to\Psi$ мусить бути класичною тавтологією, тобто тоді $\Phi\ |\!=_t \Psi$.

Введемо тепер відношення слабких наслідків.

Формула Ψ є слабким логічним наслідком [4] формули Φ, що позначимо $\Phi\ \|\!= \Psi$, якщо для кожної АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ з умови $\boldsymbol{A}\ |\!= \Phi$ випливає $\boldsymbol{A}\ |\!= \Psi$.

Формула Ψ є слабким тотальним наслідком формули Φ, що позначимо $\Phi\ \|\!\equiv \Psi$, якщо для кожної АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I})$ з умови $\boldsymbol{A}\ |\!\equiv \Phi$ випливає $\boldsymbol{A}\ |\!\equiv \Psi$.

Твердження 2. Відношення логічного наслідку $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$, $|\!=_t$, $\|\!=$, $|\!\equiv$ рефлексивні й транзитивні.

Твердження 3. Нехай АС $\boldsymbol{B} = (A, \boldsymbol{I}_B)$ дуальна до АС $\boldsymbol{A} = (A, \boldsymbol{I}_A)$. Тоді

1) $\Phi\ _A|\!=_T \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _B|\!=_F \Psi$ та $\Phi\ _A|\!=_F \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _B|\!=_T \Psi$;

2) $\Phi\ _A|\!=_{Cl} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _B|\!=_{Cm} \Psi$ та $\Phi\ _A|\!=_{Cm} \Psi \Leftrightarrow \Phi\ _B|\!=_{Cl} \Psi$.

Наслідок 4. У випадку загальної семантики $\Phi\ |\!=_T \Psi \Leftrightarrow \Phi\ |\!=_F \Psi \Leftrightarrow\ |\!=_{TF} \Psi$.

Розглянемо наслідки з порожньої множини формул.

$\varnothing\ _A|\!=_T \Phi$ та $\varnothing\ _A|\!=_{Cm} \Phi$ означають $\boldsymbol{T}(\Phi_A) = D$, тобто $\boldsymbol{A}\ |\!\equiv \Phi$.

$\varnothing\ _A|\!=_F \Phi$ та $\varnothing\ _A|\!=_{Cl} \Phi$ означають $\boldsymbol{F}(\Phi_A) = \varnothing$, тобто $\boldsymbol{A}\ |\!= \Phi$.

$\varnothing\ _A|\!=_{TF} \Phi$ означає $\boldsymbol{T}(\Phi_A) = D$ та $\boldsymbol{F}(\Phi_A) = \varnothing$, тобто Φ_A тотожно істинний.

$\varnothing\ |\!=_* \Phi$ означає, що $\varnothing\ _A|\!=_* \Phi$ для всіх АС $\boldsymbol{A}$ (тут $*$ – одне з Cl, Cm, T, F, TF).

Тоді $\varnothing\ |\!=_T \Phi \Leftrightarrow \varnothing\ |\!=_{Cm} \Phi \Leftrightarrow \varnothing\ \|\!\equiv \Phi \Leftrightarrow\ |\!\equiv \Phi$; $\varnothing\ |\!=_F \Phi \Leftrightarrow \varnothing\ |\!=_{Cl} \Phi \Leftrightarrow \varnothing\ \|\!= \Phi \Leftrightarrow\ |\!= \Phi$.

Відношення логічного наслідку індукують відповідні *відношення логічної еквівалентності*. Такі відношення рефлексивні, транзитивні й симетричні.

Відношення еквівалентності в АС $\boldsymbol{A}$ $_A{\sim}_T$, $_A{\sim}_F$, $_A{\sim}_{TF}$, $_A{\sim}_{Cl}$, $_A{\sim}_{Cm}$ визначаємо за такою схемою (тут $*$ – одне з Cl, Cm, T, F, TF):

Φ та Ψ $*$-еквівалентні в АС $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}{\sim}_* \Psi$), якщо $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_* \Psi$ та $\Psi\ _{\boldsymbol{A}}|\!=_* \Phi$.

Зауважимо, що $\Phi\ _{\boldsymbol{A}}{\sim}_{TF}\ \Psi \Leftrightarrow \boldsymbol{T}(\Phi_A) = \boldsymbol{T}(\Psi_A)$ та $\boldsymbol{F}(\Phi_A) = \boldsymbol{F}(\Psi_A)$, тобто Φ_A та Ψ_A – один і той же предикат.

Відношення логічної $*$-еквівалентності $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$, $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$ визначаємо за такою схемою (тут $*$ – одне з *Cl, Cm, T, F, TF*):

Φ та Ψ логічно $*$-еквівалентні (позначаємо $\Phi \sim_* \Psi$), якщо $\Phi \models_* \Psi$ та $\Psi \models_* \Phi$.

$\Phi \sim_{TF} \Psi$ означає: Φ та Ψ завжди інтерпретуються як один і той же предикат.

Φ та Ψ тавтологічно еквівалентні ($\Phi \sim_t \Psi$), якщо $\Phi \models_t \Psi$ та $\Psi \models_t \Phi$.

Специфічну поведінку відношень логічної еквівалентності в різних семантиках демонструють наступні приклади.

Приклад 2. Для неокласичної семантики

$$\Phi \vee \Psi\&\neg\Psi \sim_T \Phi$$

та невірно

$$\Phi \vee \Psi\&\neg\Psi \sim_F \Phi.$$

Справді, для *АС* $\boldsymbol{B}$ такої, що $\boldsymbol{F}(\Phi_B) \neq \varnothing$ та $\boldsymbol{T}(\Psi_B) = \boldsymbol{F}(\Psi_B) = \varnothing$, маємо

$$\boldsymbol{F}((\Phi \vee \Psi\&\neg\Psi)_B) = \boldsymbol{F}(\Phi_B)\cap(\boldsymbol{F}(\Psi_B)\cup\boldsymbol{T}(\Psi_B) = \varnothing.$$

Приклад 3. Для пересиченої семантики

$$\Phi \vee \Psi\&\neg\Psi \sim_F \Phi$$

та невірно

$$\Phi \vee \Psi\&\neg\Psi \sim_T \Phi.$$

Справді, для *АС* $\boldsymbol{B}$ такої, що $(\boldsymbol{T}(\Psi_B)\cap\boldsymbol{F}(\Psi_B))\backslash\boldsymbol{T}(\Phi_B) \neq \varnothing$, маємо

$$\boldsymbol{T}((\Phi \vee \Psi\&\neg\Psi)_B) = \boldsymbol{T}(\Phi_B)\cup(\boldsymbol{T}(\Psi_B)\cap\boldsymbol{F}(\Psi_B)) \supset \boldsymbol{T}(\Phi_B).$$

Приклад 4. Для неокласичної семантики

$$\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi) \sim_F \Phi$$

та невірно

$$\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi) \sim_T \Phi.$$

Справді, для *АС* $\boldsymbol{B}$ такої, що $\boldsymbol{T}(\Phi_B) \neq \varnothing$ та $\boldsymbol{T}(\Psi_B) = \boldsymbol{F}(\Psi_B) = \varnothing$, маємо

$$\boldsymbol{T}((\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi))_B) = \boldsymbol{T}(\Phi_B)\cap(\boldsymbol{T}(\Psi_B)\cup\boldsymbol{F}(\Psi_B) = \varnothing.$$

Приклад 5. Для пересиченої семантики

$$\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi) \sim_T \Phi$$

та невірно

$$\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi) \sim_F \Phi.$$

Справді, для *АС* $\boldsymbol{B}$ такої, що $(\boldsymbol{F}(\Psi_B)\cap\boldsymbol{T}(\Psi_B))\backslash\boldsymbol{F}(\Phi_B) \neq \varnothing$, маємо

$$\boldsymbol{F}((\Phi\&(\Psi\vee\neg\Psi))_B) = \boldsymbol{F}(\Phi_B)\cup(\boldsymbol{F}(\Psi_B)\cap\boldsymbol{T}(\Psi_B)) \supset \boldsymbol{F}(\Phi_B).$$

Для відношень $\sim_t$, $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$ та $\sim_{TF}$ справджується теорема семантичної еквівалентності (тут $*$ – одне з *t, Cl, Cm, TF*). Доведення – індукція за побудовою формули.

Теорема 7. Нехай формула Φ' отримана з Φ заміною деяких входжень формул $\Phi_1, ..., \Phi_n$ на $\Psi_1, ..., \Psi_n$ відповідно. Якщо $\Phi_1 \sim_* \Psi_1, ..., \Phi_n \sim_* \Psi_n$, *то* $\Phi \sim_* \Phi'$.

Для відношень $\sim_T$ та $\sim_F$ теорема 7, взагалі кажучи, невірна. Справді, як видно із прикладів 2 – 5, можлива ситуація, коли вірно $\Xi \sim_T \Phi$ та невірно $\neg\Xi \sim_T \neg\Phi$, адже $\neg\Xi \sim_T \neg\Phi \Leftrightarrow \Xi \sim_F \Phi$; можливо також, що вірно $\Xi \sim_F \Phi$ та невірно $\neg\Xi \sim_F \neg\Phi$.

Поширимо поняття логічного наслідку на довільні множини формул.

Нехай $\Gamma \subseteq Fr$ та $\Delta \subseteq Fr$ – деякі множини формул.

Δ є T-логічним наслідком Γ в АС $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A}}\!\models_{\boldsymbol{T}} \Delta$), якщо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A).$$

Δ є F-логічним наслідком Γ в АС $\boldsymbol{A}$ (позначаємо $\Gamma\ {}_{\boldsymbol{A}}\!\models_{\boldsymbol{F}} \Delta$), якщо

$$\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A).$$

Δ є *TF*-логічним наслідком Γ в АС ***A*** (позначаємо $\Gamma\,_{A}|\!=_{TF}\Delta$), якщо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \subseteq \bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A) \text{ та } \bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) \subseteq \bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A).$$

Δ є *Cl*-логічним наслідком Γ в АС ***A*** (позначаємо $\Gamma\,_{A}|\!=_{Cl}\Delta$), якщо

$$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_A) \cap \bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_A) = \varnothing.$$

Δ є *Cm*-логічним наслідком Γ в АС ***A*** (позначаємо $\Gamma\,_{A}|\!=_{Cm}\Delta$), якщо

$$\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_A) \cup \bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_A) = D.$$

Відношення ∗-логічного наслідку для множин формул $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$ визначаємо за такою схемою (тут ∗ – одне з *Cl*, *Cm*, *T*, *F*, *TF*):

Δ є ∗-логічним наслідком Γ (позначимо $\Gamma\,|\!=_*\Delta$), якщо $\Gamma\,_{A}|\!=_*\Delta$ для кожної АС ***A***.

Δ є тавтологічним наслідком Γ (позначимо $\Gamma\,|\!=_t\Delta$), якщо для кожної істиннісної оцінки $\tau: Fp\to\{T, F\}$ із умови τ(Φ)=*T* для всіх Φ∈Γ, випливає τ(Ψ)=*T* для деякої Ψ∈Δ.

Твердження 4. Відношення логічного наслідку для множин формул рефлексивні, але не транзитивні.

У відповідних семантиках для відношень $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$ справджується

Теорема 8 (заміни еквівалентних). Нехай $\Phi \sim_{TF} \Psi$. Тоді

$\Phi, \Gamma\,|\!=\Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma\,|\!=\Delta$ та $\Gamma\,|\!=\Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma\,|\!=\Delta, \Psi$.

Тут |= – одне з відношень $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$, $|\!=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$.

Замість $\sim_{TF}$ в теоремі 8 можна брати $\sim_t$, $\sim_{Cl}$, $\sim_{Cm}$. Тоді |= буде відповідно відношенням $|\!=_t$, $=_{Cl}$, $|\!=_{Cm}$. Отримуємо ще три різновидності теореми заміни еквівалентних, перша з яких – для класичної пропозиційної логіки, друга – для логіки часткових однозначних предикатів, третя – для логіки тотальних неоднозначних предикатів.

Розглянемо детальніше семантичні властивості номінативних рівнів.

Основні властивості формул, пов'язані з реномінаціями, повторюють властивості квазіарних предикатів, наведені в теоремі 3, лише замість «=« пишемо «$\sim_{TF}$».

Наведемо основні властивості композицій квантифікації.

Q1) $\exists x\exists y\Phi \sim_{TF} \exists y\exists x\Phi$ та $\forall x\forall y\Phi \sim_{TF} \forall y\forall x\Phi$.

Q2) $\neg\forall x\Phi \sim_{TF} \exists x\neg\Phi$ та $\neg\exists x\Phi \sim_{TF} \forall x\neg\Phi$.

Q3) $\exists x\Phi \sim_{TF} \forall x\exists x\Phi$, $\exists x\Phi \sim_{TF} \exists x\exists x\Phi$; $\forall x\Phi \sim_{TF} \forall x\forall x\Phi$, $\forall x\Phi \sim_{TF} \exists x\forall x\Phi$.

Q4) $\exists x\Phi\vee\exists x\Psi \sim_{TF} \exists x(\Phi\vee\Psi)$ та $\forall x\Phi\&\forall x\Psi \sim_{TF} \forall x(\Phi\&\Psi)$.

Q5) $\exists x(\Phi\&\Psi)|\!=_{TF} \exists x\Phi\&\exists x\Psi$ та $\forall x\Phi\vee\forall x\Psi|\!=_{TF} \forall x(\Phi\vee\Psi)$.

Q6) Якщо $\Phi\,|\!=_{TF}\Psi$, то $\exists x\Phi\,|\!=_{TF}\exists x\Psi$ та $\forall x\Phi\,|\!=_{TF}\forall x\Psi$.

Q7) $\exists y\forall x\Phi\,|\!=_{TF}\forall x\exists y\Phi$.

Q8) $\Phi\,||\!=\exists x\Phi$, $\Phi\,||\!=\forall x\Phi$ та $\Phi\,||\!\equiv\exists x\Phi$, $\Phi\,||\!\equiv\forall x\Phi$.

Для логік часткових однозначних предикатів додаємо властивості:

Q7P) $|\!=\exists y\forall x\Phi\to\forall x\exists y\Phi$.

Q9P) Якщо $|\!=\Phi$, то $|\!=\exists x\Phi$, $|\!=\forall x\Phi$, $\Phi\sim_{Cl}\exists x\Phi$ та $\Phi\sim_{Cl}\forall x\Phi$.

Q10P) $|\!=\forall x(\forall x\Phi\to\Phi)$ та $|\!=\exists x(\forall x\Phi\to\Phi)$; $|\!=\forall x(\Phi\to\exists x\Phi)$ та $|\!=\exists x(\Phi\to\exists x\Phi)$.

Для логік тотальних неоднозначних предикатів додаємо властивості:

Q7T) $|\!\equiv\exists y\forall x\Phi\to\forall x\exists y\Phi$.

Q9T) Якщо $|\!\equiv\Phi$, то $|\!\equiv\exists x\Phi$, $|\!\equiv\forall x\Phi$, $\Phi\sim_{Cm}\exists x\Phi$ та $\Phi\sim_{Cm}\forall x\Phi$.

Q10T) $|\equiv \forall x\,(\forall x\Phi\to\Phi)$ та $|\equiv \exists x\,(\forall x\Phi\to\Phi)$; $|\equiv \forall x\,(\Phi\to\exists x\Phi)$ та $|\equiv \exists x\,(\Phi\to\exists x\Phi)$.

Твердження 5. Існують АС $\boldsymbol{A}$ та формула Φ такі:

$$\Phi\ {}_A|\!=_{TF} \forall x\Phi,\ \exists x\Phi\ {}_A|\!\neq_{Cl} \Phi,\ \exists x\Phi\ {}_A|\!\neq_{Cm} \Phi.$$

Шукана Φ – це формула $\forall x\, p \to p$ для ПС p. Далі інтерпретуємо p на певній АС $\boldsymbol{A}$ як предикат P_2 прикладу 1: $p_A(d) = P_2(d) = \begin{cases}\{T\}, \text{ якщо } x \in im(d),\\ \{F\}, \text{ якщо } x \notin im(d).\end{cases}$

Тоді маємо $\varnothing \subset \boldsymbol{T}(p_A) \subset {}^VA$, $\varnothing \subset \boldsymbol{F}(p_A) \subset {}^VA$, $\boldsymbol{T}(\forall x\, p_A) = {}^VA$, $\boldsymbol{F}(\forall x\, p_A) = \varnothing$.

Звідси $\boldsymbol{T}(\exists x(\forall x\, p \to p)_A) = {}^VA$, $\boldsymbol{F}(\exists x(\forall x\, p \to p)_A) = \varnothing$, $\boldsymbol{T}(\forall x(\forall x\, p \to p)_A) = {}^VA$, $\boldsymbol{F}(\forall x(\forall x\, p \to p)_A) = \varnothing$, $\varnothing \subset \boldsymbol{T}((\forall x\, p \to p)_A) \subset {}^VA$, $\varnothing \subset \boldsymbol{F}((\forall x\, p \to p)_A) \subset {}^VA$.

Твердження 6. Для загального випадку квазіарних предикатів не завжди вірні $R_z^x(\Phi)\ {}_A|\!= \exists x\Phi$ та $\forall x\Psi\ {}_A|\!= R_z^x(\Psi)$ (тут ${}_A|\!=$ – одне з ${}_A|\!=_{Cl}$, ${}_A|\!=_{Cm}$, ${}_A|\!=_T$, ${}_A|\!=_F$, ${}_A|\!=_{TF}$).

Для доведення у ролі Φ та Ψ візьмемо ПС, далі проінтерпретуємо їх на певній АС $\boldsymbol{A}$ відповідно як предикати P_1 та P_2 прикладу 1.

Наслідок 5. 1) Існують АС $\boldsymbol{A}$ та формула Φ: $\Phi\ {}_A|\!\neq_{Cl} \exists x\Phi$ та $\Phi\ {}_A|\!\neq_{Cm} \exists x\Phi$;

2) існують АС $\boldsymbol{A}$ та формула Φ: $\forall x\Phi\ {}_A|\!\neq_{Cl} \Phi$ та $\forall x\Phi\ {}_A|\!\neq_{Cm} \Phi$;

3) існує формула Φ: невірно $\forall x\Phi \,||\!= \Phi$ та невірно $\forall x\Phi \,||\!\equiv \Phi$.

Наслідок 6. 1) У випадку неокласичної семантики не завжди $|\!=\forall x\Phi\to\Phi$, $\forall x\Phi \,||\!= \Phi$, $|\!= \Phi\to\exists x\Phi$; для деяких формул Φ можливо: $|\!= \Phi\to\forall x\Phi$ та $|\!\neq \exists x\Phi\to\Phi$;

2) у випадку пересиченої семантики не завжди $|\!\equiv\forall x\Phi\to\Phi$, $\forall x\Phi \,||\!\equiv \Phi$, $|\!\equiv \Phi\to\exists x\Phi$; для деяких формул Φ можливо: $|\!\equiv \Phi\to\forall x\Phi$ та невірно $|\!\equiv \exists x\Phi\to\Phi$.

На основі розглянутих вище властивостей отримуємо наступні твердження.

Теорема 9. Для випадку неокласичної семантики:

1) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,||\!\equiv \Psi$; невірно $\Phi \,||\!\equiv \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,||\!\equiv \exists x\Phi$; $\Phi \,||\!\equiv \forall x\Phi$;

2) невірно $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,||\!= \Psi$; $\Phi \,||\!= \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,||\!= \exists x\Phi$; $\Phi \,||\!= \forall x\Phi$;

3) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,|\!=_t \Psi$; $\Phi \,|\!=_t \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,|\!\neq_t \exists x\Phi$; $\Phi \,|\!\neq_t \forall x\Phi$;

4) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,|\!=_{Cl} \Psi$; $\Phi \,|\!=_{Cl} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,|\!=_{Cl} \exists x\Phi$; $\Phi \,|\!\neq_{Cl} \forall x\Phi$;

5) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,|\!=_T \Psi$; $\Phi \,|\!\neq_T \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,|\!=_T \exists x\Phi$; $\Phi \,|\!\neq_T \forall x\Phi$;

6) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,|\!\neq_F \Psi$; $\Phi \,|\!=_F \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,|\!=_F \exists x\Phi$; $\Phi \,|\!\neq_F \forall x\Phi$;

7) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,|\!\neq_{TF} \Psi$; $\Phi \,|\!\neq_{TF} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,|\!=_{TF} \exists x\Phi$; $\Phi \,|\!\neq_{TF} \forall x\Phi$.

Теорема 10. Для випадку пересиченої семантики:

1) невірно $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,||\!\equiv \Psi$; $\Phi \,||\!\equiv \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,||\!\equiv \exists x\Phi$; $\Phi \,||\!\equiv \forall x\Phi$;

2) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,||\!= \Psi$; невірно $\Phi \,||\!= \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,||\!= \exists x\Phi$; $\Phi \,||\!= \forall x\Phi$;

3) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,|\!=_t \Psi$; $\Phi \,|\!=_t \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,|\!\neq_t \exists x\Phi$; $\Phi \,|\!\neq_t \forall x\Phi$;

4) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,|\!=_{Cm} \Psi$; $\Phi \,|\!=_{Cm} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,|\!=_{Cm} \exists x\Phi$; $\Phi \,|\!\neq_{Cm} \forall x\Phi$;

5) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,|\!\neq_T \Psi$; $\Phi \,|\!=_T \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,|\!=_T \exists x\Phi$; $\Phi \,|\!\neq_T \forall x\Phi$;

6) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,|\!=_F \Psi$; $\Phi \,|\!\neq_F \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,|\!=_F \exists x\Phi$; $\Phi \,|\!\neq_F \forall x\Phi$;

7) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,|\!\neq_{TF} \Psi$; $\Phi \,|\!\neq_{TF} \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,|\!=_{TF} \exists x\Phi$; $\Phi \,|\!\neq_{TF} \forall x\Phi$.

Теорема 11. Для випадку загальної семантики:

1) $\Phi \,|\!=_{TF} \Psi \Leftrightarrow \Phi \,|\!=_T \Psi \Leftrightarrow \Phi \,|\!=_F \Psi$;

2) $\Phi \,||\!= \Psi \Leftrightarrow \Phi \,||\!\equiv \Psi$;

3) $\forall x\Phi \,||\!\equiv \exists x\Phi$; $\Phi \,||\!\equiv \forall x\Phi$; $\forall x\Phi \,||\!= \exists x\Phi$; $\Phi \,||\!= \forall x\Phi$;

4) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,|\!=_t \Psi$; $\Phi \,|\!=_t \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$; $\forall x\Phi \,|\!\neq_t \exists x\Phi$; $\Phi \,|\!\neq_t \forall x\Phi$;

5) $\Phi\,\&\,(\Phi\to\Psi) \,|\!\neq \Psi$, $\Phi \,|\!\neq \Psi \vee \Phi\&\neg\Psi$, $\forall x\Phi \,|\!= \exists x\Phi$; $\Phi \,|\!\neq \forall x\Phi$

(тут $|\!=$ – одне з відношень $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$).

Для логік еквітонних та логік антитонних предикатів додатково маємо:

Теорема 12. 1) Для логік еквітонних предикатів у відповідних семантиках завжди $\Phi\ {}_A|=_{Cl} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\ {}_A|=_{Cl} \Phi$, $\Phi\ {}_A|=_{Cm} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\ {}_A|=_{Cm} \Phi$, $\Phi\ {}_A|=_T \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\ {}_A|=_F \Phi$, $\forall x\Phi\ ||= \Phi$; не завжди $\Phi\ {}_A|=_F \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\ {}_A|=_T \Phi$, $\Phi\ {}_A|=_{TF} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\ {}_A|=_{TF} \Phi$, $\forall x\Phi\ ||\equiv \Phi$.

2) Для логік антитонних предикатів у відповідних семантиках завжди $\Phi\ {}_A|=_{Cl} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\ {}_A|=_{Cl} \Phi$, $\Phi\ {}_A|=_{Cm} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\ {}_A|=_{Cm} \Phi$, $\Phi\ {}_A|=_F \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\ {}_A|=_T \Phi$, $\forall x\Phi\ ||\equiv \Phi$; не завжди $\Phi\ {}_A|=_T \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\ {}_A|=_F \Phi$, $\Phi\ {}_A|=_{TF} \exists x\Phi$, $\forall x\Phi\ {}_A|=_{TF} \Phi$, $\forall x\Phi\ ||= \Phi$.

Для доведення використовуємо відповідні предикати із прикладу 1, записані як Φ_A для певної АС $\boldsymbol{A}$, де Φ – ПС.

Наслідок 7. 1. Для логік квазіарних предикатів у випадку загальної семантики $\Phi\ |=_T \Psi \Leftrightarrow \Phi\ |=_F \Psi \Leftrightarrow\ |=_{TF} \Psi$.

2. У випадках загальної семантики еквітонних предикатів і загальної семантики антитонних предикатів відношення $|=_T$, $|=_F$ та $|=_{TF}$ різні.

Таким чином, отримуємо наступні співвідношення для множин формул, які перебувають у відповідних відношеннях логічного наслідку.

1. Неокласична семантика:

$|=_{TF} \subset |=_T$, $|=_{TF} \subset |=_F$, $|=_T \subset |=_{Cl}$, $|=_F \subset |=_{Cl}$; $|=_t \subset |=_{Cl}$, $|=_F \subset ||=$, $|=_T \subset ||\equiv$; $|=_{Cm} = \varnothing$;

$|=_t \not\subset |=_T$, $|=_t \not\subset |=_F$, $|=_{TF} \not\subset |=_t$; $|=_T \not\subset ||=$, $|=_F \not\subset ||\equiv$, $||= \not\subset |=_{Cl}$, $||\equiv \not\subset |=_{Cl}$.

2. Пересичена семантика:

$|=_{TF} \subset |=_T$, $|=_{TF} \subset |=_F$, $|=_T \subset |=_{Cm}$, $|=_F \subset |=_{Cm}$; $|=_t \subset |=_{Cm}$, $|=_F \subset ||=$, $|=_T \subset ||\equiv$; $|=_{Cl} = \varnothing$;

$|=_t \not\subset |=_T$, $|=_t \not\subset |=_F$, $|=_{TF} \not\subset |=_t$; $|=_T \not\subset ||=$, $|=_F \not\subset ||\equiv$, $||= \not\subset |=_{Cm}$, $||\equiv \not\subset |=_{Cm}$.

3. Загальна семантика:

$|=_{TF} = |=_T = |=_F$; $|=_t \not\subset |=_{TF}$, $|=_{TF} \not\subset |=_t$; $|=_{TF} \subset ||\equiv = ||=$; $|=_{Cl} = \varnothing$ та $|=_{Cm} = \varnothing$.

4. Загальна семантика еквітонних і загальна семантика антитонних предикатів:

$|=_{TF} \subset |=_T$, $|=_{TF} \subset |=_F$; $|=_t \not\subset |=_{TF}$, $|=_{TF} \not\subset |=_t$; $|=_T \subset ||\equiv$, $|=_F \subset ||=$; $|=_{Cl} = \varnothing$ та $|=_{Cm} = \varnothing$.

Висновки

У роботі досліджено семантичні властивості композиційно номінативних логік часткових однозначних, тотальних та часткових неоднозначних квазіарних предикатів. Для таких логік запропоновано різні семантики та різні формалізації відношення логічного наслідку. На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів визначено такі логічні наслідки: «істиннісний», «хибнісний», «сильний», «неспростовнісний», «насичений». Ці відношення логічного наслідку індукують відповідні відношення логічної еквівалентності, вони поширюються на множини формул. Досліджено властивості та визначено співвідношення між такими формалізаціями логічного наслідку в різних семантиках. Це узагальнює відомі результати О.Д. Смирнової, отримані нею для пропозиційної логіки, на випадок логік квазіарних предикатів.

Література

1. Handbook of Logic in Computer Science : in 5 vol. / [eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T.S.E.]. – Oxford : Clarendon Press, 1994 – 2000.
2. Никитченко Н.С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы / Н.С. Никитченко // Пробл. программирования. – 1999. – № 1. – С. 16-31.
3. Нікітченко М.С. Ієрархія композиційно-номінативних логік / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк // Пробл. программирования. – 2004. – № 4. – С. 5-14.
4. Нікітченко М.С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К. : ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
5. Редько В.Н. Композиции программ и композиционное программирование / В.Н. Редько // Программирование. – 1978. – № 5. – С. 3-24.

6. Смирнова Е.Д. Логика и философия / Смирнова Е.Д. – М. : РОССПЕН, 1996. – 304 с.
7. Шкільняк С.С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках / С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2010. – № 1 – С. 15-38.

Literatura

1. Abramsky S. Handbook of Logic in Computer Science: In 5 vol. Oxford: Clarendon Press.1994-2000.
2. Nikitchenko N.S. Probl. programmirovania. 1999. № 1. S. 16-31.
3. Nikitchenko M.S. Probl. programmirovania. 2004. № 4. S. 5-14.
4. Nikitchenko M.S. Matematychna logika ta teoria algorytmiv.K.: VPC Kyivskyi universytet.2008. 528 s.
5. Redko V.N.Programmirovanie.1978. № 5. S. 324.
6. Smirnova E.D. Logica iphilosophia. M.: ROSSPEN. 1996. 304 s.
7. Shkilniak S.S. Probl. programuvannia. 2010. № 1. S. 15-38.

S.S. Shkilniak

Logical Consequence and its Formalizations in Composition Nominative Logics

There is a great number of various logical systems, which are successfully used in informatics and programming. The systems are usually based on classical predicate logic. However, classical logic has limitations that complicate its application; it doesn't sufficiently correspond to programming requirements. Fundamental limitations of classical logic make topical the problem of construction and investigation of new program oriented logical formalisms. Composition-nominative approach is common for logic and programming, therefore it is a natural basis for such a construction. On the basis of this approach we developed a spectrum of composition nominative logics at different abstraction and generality levels.

Logical consequence is the central concept of logic. In the paper we study this notion for the case of composition nominative logics of partial single-valued, total multiple-valued and partial multiple-valued quasiary predicates. For such logics, various semantics and various formalizations of relation of logical consequenceare introduced. The research generalises the results by E. Smirnova obtained for propositional logic for the case of logics of quasiary predicates.

On the basis of different relationships between domains of truth and falsity of the predicates, we define the following relations of logical consequence: "true-valued"$\models_T$, "false-valued"$\models_F$, "strong"$\models_{TF}$, "irrefutable"$\models_{Cl}$,"saturated" $\models_{Cm}$. These relations induce the corresponding equivalence relations. Also we specify the relations of tautological $\models_t$, weak $\|\!=$, and total weak $\|\!\equiv$ consequence. The defined relations are investigated in different semantics for general case of quasiary predicates and for cases of equitone and antitone predicates.

The following relationships are obtained for sets of formulas in corresponding relations.

1. Neoclassical semantics (partial single-valued predicates):

$\models_{TF} \subset \models_T$, $\models_{TF} \subset \models_F$, $\models_T \subset \models_{Cl}$, $\models_F \subset \models_{Cl}$; $\models_t \subset \models_{Cl}$, $\models_F \subset \|\!=$, $\models_T \subset \|\!\equiv$; $\models_{Cm} = \varnothing$;
$\models_t \not\subset \models_T$, $\models_t \not\subset \models_F$, $\models_{TF} \not\subset \models_t$; $\models_T \not\subset \|\!=$, $\models_F \not\subset \|\!\equiv$, $\|\!= \not\subset \models_{Cl}$, $\|\!\equiv \not\subset \models_{Cl}$.

2. Glut semantics (total multiple-valued predicates):

$\models_{TF} \subset \models_T$, $\models_{TF} \subset \models_F$, $\models_T \subset \models_{Cm}$, $\models_F \subset \models_{Cm}$; $\models_t \subset \models_{Cm}$, $\models_F \subset \|\!=$, $\models_T \subset \|\!\equiv$; $\models_{Cl} = \varnothing$;
$\models_t \not\subset \models_T$, $\models_t \not\subset \models_F$, $\models_{TF} \not\subset \models_t$; $\models_T \not\subset \|\!=$, $\models_F \not\subset \|\!\equiv$, $\|\!= \not\subset \models_{Cm}$, $\|\!\equiv \not\subset \models_{Cm}$.

3. General semantics (partial multiple-valued predicates):

$\models_{TF} = \models_T = \models_F$; $\models_t \not\subset \models_{TF}$, $\models_{TF} \not\subset \models_t$; $\models_{TF} \subset \|\!\equiv = \|\!=$; $\models_{Cl} = \varnothing$ та $\models_{Cm} = \varnothing$.

4. General semantics of equitone predicates or general semantics of antitone predicates:

$\models_{TF} \subset \models_T$, $\models_{TF} \subset \models_F$; $\models_t \not\subset \models_{TF}$, $\models_{TF} \not\subset \models_t$; $\models_T \subset \|\!\equiv$, $\models_F \subset \|\!=$; $\models_{Cl} = \varnothing$, $\models_{Cm} = \varnothing$.

Стаття надійшла до редакції 15.07.2011.